

Afstandsmeting in de sterrenkunde

Werkcollege

Marc van der Sluys
Universiteit Utrecht, Nikhef

7 april 2025

De slides van het college van vandaag (en een pdf-versie van deze opgaven) zijn te vinden op <https://hemel.waarnemen.com/lezingen/>



Inhoudsopgave

1 Opgaven	2
1.1 De omtrek van de Aarde	2
1.2 Baanperiode en -afstand van Jupiter	2
1.3 De afstand tot de Zon	2
1.4 Parallax van nabije sterren	2
1.5 Afstandsbepaling met behulp van Cepheïden	2
1.6 De uitdijning van het heelal	3
1.7 Een ver sterrenstelsel	3
2 Bonusvragen	3
2.1 De massa van de Aarde	3
2.2 De massa van de Zon	4
3 Antwoorden	5
3.1 De omtrek van de Aarde	5
3.2 Baanperiode en -afstand van Jupiter	5
3.3 De afstand tot de Zon	5
3.4 Parallax van nabije sterren	5
3.5 Afstandsbepaling met behulp van Cepheïden	5
3.6 De uitdijning van het heelal	6
3.7 Een ver sterrenstelsel	6
4 Bonusantwoorden	6
4.1 De massa van de Aarde	6
4.2 De massa van de Zon	6

1 Opgaven

1.1 De omtrek van de Aarde

Rond het jaar 240 voor onze jaartelling probeerde Eratosthenes de omtrek van de Aarde te meten.¹ Eratosthenes' boek is verloren gegaan, en de precieze waarden die hij mat zijn onzeker. Hij nam aan dat zonlicht perfect werd gereflecteerd door het water in een diepe waterput in Syene (zuid-Egypte) in de middag van de langste dag van het jaar. Op hetzelfde moment wierp een verticale paal in Alexandrië, 5000 stadia noordelijker, een schaduw die ongeveer 1/50e deel was van de lengte van de paal. Neem aan dat Eratosthenes het Olympische stadion van 176.4 m gebruikte en dat de Aarde een perfecte bol is. Wat is de straal van de aardbol R_{\oplus} ? Deze waarde is circa 10% hoger dan de moderne waarde.

1.2 Baanperiode en -afstand van Jupiter

Tussen twee opposities van Jupiter zit gemiddeld $P_{\text{syn}} \approx 398.88$ dagen. Dit is de *synodische* periode² van Jupiter, gezien vanaf de bewegende Aarde. De Aarde zelf draait in circa $P_{\oplus} \approx 365.256$ dagen om de Zon.

1. Bereken de *siderische* omlooperperiode van Jupiter.
2. Gebruik de wet van Kepler om de afstand van Jupiter tot de Zon in astronomische eenheden (AU) a te berekenen.

1.3 De afstand tot de Zon

Uit de wet van Kepler kennen we de afstanden tussen de planeten voor ieder moment in AU, maar niet in kilometers. Zodra we één afstand in kilometers meten, weten we de schaal van het zonnestelsel.

Jean Richer mat nauwkeurig de positie van Mars tijdens de zeer gunstige oppositie van 8 september 1672 in Frans Guyana, terwijl Cassini dit deed in Parijs. Rond 2 uur 's nachts in Parijs stond Mars op een afstand van 0.382 AU. Op dat moment was de geprojecteerde afstand loodrecht op de lijn Aarde–Mars tussen beide waarnemers optimaal: 6172 km. In een versimpelde reconstructie, neem aan dat de heren op dat moment een verschil in hemelpositie van 24" vonden ten opzichte van de achtergrondsterren.³

Bereken de afstand tussen de Aarde en de Zon.

1.4 Parallax van nabije sterren

De ster δ Cephei is de naamgever van de klasse van variabele sterren die we Cepheïden noemen. De Gaiasatelliet heeft de parallax van deze ster gemeten als circa 3.66 milliboogseconden. De gemiddelde visuele flux op Aarde gemeten is $f_V \approx 9.12 \times 10^{-11}$ W/m² en de pulsperiode is $P \approx 5.366270$ dagen.⁴

1. Bereken de afstand tot δ Cephei in parsec uit de parallax. Hoe lang is het licht van deze ster op weg naar de Aarde?
2. Bereken de lichtkracht van deze ster met behulp van de $P - L$ -relatie voor Cepheïden.
3. Bereken de afstand tot δ Cephei uit de waargenomen flux. Wat is je conclusie?

1.5 Afstandsbepaling met behulp van Cepheïden

De tabel hieronder toont de gemeten periodes en visuele fluxen van Cepheïden in het sterrenstelsel NGC 3370.

¹“Men” dacht dus ook 2000 jaar geleden niet dat de Aarde plat was(!) De meeste mensen hadden geen tijd om hierover na te denken, en de mensen die die luxe wel hadden, wisten dat de Aarde een bol was, bijvoorbeeld doordat de aardschaduw bij een maansverduistering altijd een cirkel is, en niet soms een streep.

²De periode waarmee de Aarde Jupiter inhaalt, vergelijkbaar met hoe de grote wijzer de kleine inhaalt op een klok.

³Een boogseconde (1") is 1/3600°.

⁴Bron: https://www.astro.utoronto.ca/DDO/research/cepheids/table_physical.html

1. Kies een Cepheïde en bereken zijn lichtkracht in de V-band L_V .
2. Bereken de afstand tot NGC 3370. Hoe lang is het licht van dit sterrenstelsel onderweg naar ons?
3. (Herhaal dit voor een tweede Cepheïde met een duidelijk andere periode. Hoe nauwkeurig is deze methode?)

	P (dagen)	$\log f_V/(W/m^2)$
0	60.68	-18.85
5	88.25	-18.90
6	17.46	-19.37
7	19.21	-19.43
10	16.22	-19.51

(Bron: https://cepheids.konkoly.hu/upl.php?gal_id=28)

1.6 De uitdijing van het heelal

We kunnen de roodverschuiving van NGC 3370 meten: $z = 0.004273$.⁵

1. Met welke radiële snelheid komt dit overeen? Neem aan dat $v \ll c$.
2. Deze snelheid is ten opzichte van de Zon. Om te corrigeren voor de ruimtelijke beweging van de Zon door het heelal moeten we hier 335 km/s optellen.⁶ Bereken de Hubbleconstante uit deze ene meting.
3. Hoe goed is je resultaat? Waardoor zou dit kunnen worden beïnvloed?

1.7 Een ver sterrenstelsel

Het ververwijderde sterrenstelsel JADES-GS-z14-0 heeft een roodverschuiving $z \approx 14.3$.

1. Hoe oud was het heelal toen het licht vertrok? Welke fractie van de huidige leeftijd van het heelal is dat?
2. Hoe lang is het licht onderweg geweest naar de Aarde?
3. Op welke afstand zien we dit sterrenstelsel?
4. Welke fractie van zijn huidige grootte (in volume) had het heelal toen?

2 Bonusvragen

2.1 De massa van de Aarde

In 1797–1798 bepaalde de Engelsman Henry Cavendish de zwaartekrachtconstante G in een experiment waarin hij de zwaartekracht van zware bollen op lichte bollen mat. Hij drukte het resultaat uit als de gemiddelde dichtheid van de Aarde: circa 5,5 keer die van water: $\bar{\rho}_\oplus \approx 5.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.

1. Schrijf de massa van de Aarde M_\oplus als functie van haar straal R_\oplus en gemiddelde dichtheid $\bar{\rho}_\oplus$.
2. Bereken de massa van de Aarde M_\oplus in kilogrammen.

⁵<https://ned.ipac.caltech.edu/byname?objname=NGC+3370>

⁶Ons Melkwegstelsel beweegt met circa 600 km/s richting de *Great Attractor*, een dichte verzameling van sterrenstelsels op circa 50–80 Mpc afstand. Ook andere nabije sterrenstelsels worden hierdoor beïnvloed. De Zon beweegt op haar beurt met circa 220 km/s rond het centrum van ons Melkwegstelsel.

2.2 De massa van de Zon

De valversnelling op het aardoppervlak wordt gemeten als $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

1. Schrijf g als functie van de massa en straal van de Aarde, met behulp van Newtons 2e bewegingswet en zijn zwaartekrachtwet op een testmassa m .
2. Los hieruit G op, en schrijf dit als functie van g , M_{\oplus} en R_{\oplus} .
3. Substitueer de uitdrukking uit vraag 2.1.1 in die uit vraag 2.1.2.
4. Los de massa van de Zon M_{\odot} op uit de wet van Kepler, en schrijf dit als functie van a , G en P .
5. Substitueer de uitdrukking van vraag 3 in die van vraag 4.
6. Bereken M_{\odot} in kilogrammen.

3 Antwoorden

3.1 De omtrek van de Aarde

De hoek tussen de top van de paal en de zonnestraal is dezelfde als die tussen de lijnen die het centrum van de Aarde verbinden met Alexandrië dan wel Syene. Als de schaduw $1/50$ e van de lengte van de paal is, is de afstand d tussen Alexandrië en Syene $1/50$ e van de omtrek van de Aarde. Dus $O \sim 50 \cdot 5000$ stadia $\sim 250\,000$ stadia $\sim 44\,100$ km. De werkelijke omtrek van de Aarde over de polen is circa $39\,941$ km.

3.2 Baanperiode en -afstand van Jupiter

$$1. \frac{1}{P_{\text{syn}}} = \frac{1}{P_{\oplus}} - \frac{1}{P_{\text{sid}}}$$

$$\rightarrow P_{\text{sid}} = \frac{1}{\frac{1}{P_{\oplus}} - \frac{1}{P_{\text{syn}}}} = \frac{1}{\frac{P_{\text{syn}}P_{\oplus}}{P_{\text{syn}}P_{\oplus}} - \frac{P_{\text{syn}}P_{\oplus}}{P_{\text{syn}}P_{\oplus}}} = \frac{P_{\text{syn}}P_{\oplus}}{P_{\text{syn}} - P_{\oplus}} = \frac{P_{\text{syn}}}{P_{\text{syn}} - P_{\oplus}} \text{ yr} \rightarrow P_{\text{sid}} \approx 11.863 \text{ yr.}$$

$$2. a^3 \propto P^2 \rightarrow \frac{a}{\text{AU}} = \left(\frac{P}{\text{yr}}\right)^{2/3} \rightarrow a \approx 5.20 \text{ AU.}$$

3.3 De afstand tot de Zon

$$\tan(24'') \approx \frac{6172 \text{ km}}{0.382 \text{ AU}}$$

$$\rightarrow 1 \text{ AU} \approx \frac{6172 \text{ km}}{0.382 \cdot \tan(24'')} \approx \frac{6172 \text{ km}}{0.382 \cdot 1.16355 \times 10^{-4}} \approx 139 \text{ miljoen km.}^7$$

Deze uitkomst is ongeveer 7% lager dan de moderne waarde van 149.6 miljoen km.

3.4 Parallax van nabije sterren

- $d = 1/p \approx \frac{1}{3.66 \times 10^{-3}} \approx 273$ pc. Dit komt overeen met 891 lichtjaar.
- $L_V \approx 41.72 \left(\frac{P}{\text{day}}\right)^{1.104} \approx 267 L_{\odot}$.
- $L = 4\pi d^2 f_V \rightarrow d = \sqrt{\frac{L}{4\pi f_V}} \approx 307$ pc. Dit is geen perfecte overeenkomst met vraag 1, maar een nauwkeurigheid van $\sim 11\%$ is niet gek voor Cepheïden op grotere afstand, wanneer alleen een knipperend puntje zichtbaar is!

3.5 Afstandsbepaling met behulp van Cepheïden

	P (dagen)	$\log f_V / (\text{W}/\text{m}^2)$	$L_V (L_{\odot})$	d_L (Mpc)	H_0 (km/s/Mpc)
0	60.68	-18.85	3879.95	29.78	54.28
5	88.25	-18.90	5866.96	38.88	41.57
6	17.46	-19.37	980.76	27.34	59.11
7	19.21	-19.43	1089.83	30.77	52.52
10	16.22	-19.51	904.15	30.65	52.74
mean	40.36	-19.21	2544.33	31.48	52.04
stdev	29.19	0.28	2003.71	3.90	5.75

1. Zie tabel.

⁷Merk op dat voor een kleine hoek de tangens (en sinus) gelijk is aan die hoek in radialen: $\tan 24'' \sim 24 \cdot \frac{\pi}{3600 \cdot 180}$!

2. Zie tabel. Als we deze vijf Cepheïden gebruiken vinden we 31.5 ± 3.9 Mpc. Een overzicht van 53 studies met verschillende methoden vinden 26.4 ± 4.4 Mpc. Binnen de fout komt onze waarde hiermee overeen.
3. Het licht heeft circa $31.5 \cdot 3.26 \approx 103$ jaar (of $26.4 \cdot 3.26 \approx 86$ jaar) nodig om ons te bereiken.

3.6 De uitdijing van het heelal

1. Dit komt overeen met een radiële snelheid van $v \sim cz \approx 1281$ km/s.
2. De gecorrigeerde snelheid is $v \approx 1616$ km/s. Met $d_L=31.5$ Mpc vinden we $H_0 \approx 51\text{--}52$ km/s/Mpc, met $d=26.4$ Mpc 61.2 km/s/Mpc.
3. De waardes zijn 10–30% lager dan de waarde van 67.4 km/s/Mpc zoals gemeten door de Planck-satelliet. Blijkbaar heeft NGC 3370 zelf ook een significante snelheid t.o.v. de *Hubble flow*.

3.7 Een ver sterrenstelsel

1. De relatieve leeftijd van het heelal was $t_{\text{rel}} = \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \approx 0.017$, dus 1.7% van de huidige leeftijd. Met $t_0 \approx 13.79$ Gyr geeft dat $t \approx 230$ Myr.
2. De rest van de huidige leeftijd van het heelal: $t_L = t_0(1 - t_{\text{rel}}) \approx 98.3\% \cdot 13.79$ Gyr ≈ 13.56 Gyr.
3. 13.56 Gly ≈ 4.16 Gpc.
4. $a(z) = \frac{1}{1+z} \approx 0.065$. $V \propto a^3 \sim 2.8 \times 10^{-4}$ van het huidige volume: een baby-heelalletje...

4 Bonusantwoorden

4.1 De massa van de Aarde

1. $M_{\oplus} = \frac{4\pi}{3} R_{\oplus}^3 \bar{\rho}_{\oplus}$
2. $M_{\oplus} \approx \frac{4\pi}{3} (6.378 \times 10^6 \text{ m})^3 \cdot 5.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \approx 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$.

4.2 De massa van de Zon

1. $F = \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}^2} = mg \rightarrow g = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}$
2. $G = g \frac{R_{\oplus}^2}{M_{\oplus}}$
3. $G = g \frac{R_{\oplus}^2}{\frac{4\pi}{3} R_{\oplus}^3 \bar{\rho}_{\oplus}} = \frac{3g}{4\pi R_{\oplus} \bar{\rho}_{\oplus}}$
4. $M_{\odot} = \frac{a_{\oplus}^3}{G} \left(\frac{2\pi}{P_{\oplus}} \right)^2$
5. $M_{\odot} = \frac{4\pi}{3} \frac{R_{\oplus} \bar{\rho}_{\oplus}}{g} a_{\oplus}^3 \left(\frac{2\pi}{P_{\oplus}} \right)^2$
6. $M_{\odot} \approx \dots \approx 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$.